Деление с остатком

Теорема 29.1. Для любого целого числа a и любого натурального числа b существуют единственная пара целых чисел q и r таких, что $a = bq + r$ и $0 \leqslant r < b$.

В этом случае число q называется *неполным частным*, а целое неотрицательное число r называется *остатком* от деления a на b.

Доказательство. Доказательство проведем в два этапа. Сначала докажем, что для любого целого a и натурального b числа q и r существуют, а потом то, что они определяются единственным образом.

1. Существование. Возьмем числовую прямую с отмеченной на ней точкой 0 — началом отсчета. Также отметим на ней число a. Начнем откладывать в обе стороны от точки 0 отрезки длины b и отмечать их концы. На прямой помимо a появятся точки $\ldots, -3b, -2b, -b, 0, b, 2b, 3b, \ldots$. Поскольку точка a находится на каком-то конкретном расстоянии от начала отсчета, то в некоторый момент очередной отложенный отрезок длины b «накроет» ее. В итоге точка a либо окажется между точками qb и $(q+1)b$ — концами очередного отрезка, либо совпадет с одним из них, будем считать, что с qb. Значит можно записать следующее неравенство: $qb \leqslant a < (q+1)b$. Уменьшая все части данного двойного неравенства на qb, получим $0 \leqslant a - qb < b$. Если теперь в этом неравенстве обозначим $a - qb = r$, то получим $0 \leqslant r < b$, и $a = qb + r$.

Тем самым мы показали, как можно найти числа q и r, удовлетворяющие условию теоремы. Теперь докажем, что данная пара чисел — единственная, удовлетворяющая условиям.

2. Единственность. Предположим, что помимо пары чисел q и r существует еще пара чисел q' и r', отличающаяся от первой хотя бы одним из чисел q' или r', причем

$$a = bq + r, \quad 0 \leqslant r < b,$$

$$a = bq' + r, \quad 0 \leqslant r' < b.$$

Тогда $bq + r = bq' + r'$. Если в последнем равенстве $q = q'$, то и $r = r'$, что означает совпадение пар чисел q, r и q', r' и противоречит предположению. Пусть $q \neq q'$. Будем считать, что $q' > q$ (случай $q' < q$ полностью аналогичен). Из равенства $bq + r = bq' + r'$ получаем $r - r' = b(q' - q)$. Поскольку числа q и q' — целые, $q' > q$, то $q' - q \geqslant 1$, $r - r' \geqslant b$. С другой стороны числа r и r' — неотрицательные и меньше b, поэтому их разность должна быть обязательно меньше b. Приходим к противоречию, значит предположение о существовании второй пары чисел q', r неверно. Единственность доказана.

Скажем теперь несколько слов по поводу этой теоремы. Собственно делить числа друг на друга с остатком учат еще в начальной школе. Однако данная теорема дает некоторые новые сведения и возможности. Во-первых, здесь четко определяется, что значит разделить одно число на другое с остатком, дается строгое определение неполного частного и остатка. Также доказывается, что такое деление можно провести всегда, причем единственным образом. Но более важный факт заметен не сразу. В начальной школе делились с остатком только натуральные числа на натуральные. В теореме же речь идет о делении любого <u>целого</u> числа на натуральное. И отличие здесь оказывается существенным. Разберем пример.

Пример 29.1. Найти остаток от деления числа -23 на 7.

В большинстве случаев начинают рассуждать следующим образом: «Поскольку остаток от деления 23 на 7 равен 2, а целое частное 3, это всем ясно, то в случае числа -23 получим остаток -2, а целое частное -3.» Но данный ответ неверный. Если вспомнить определение остатка, то он должен быть целым неотрицательным числом, меньшим 7, т.е. может принимать значения $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, и равняться -2 никак не может. После данного пояснения самым распространенным является ответ: «Ну тогда остаток будет 2, как и в случае числа 23.» Однако он тоже оказывается неверным.

Начнем рассуждать исходя из определения. Нам необходимо представить число -23 в виде $-23 = 7q + r$. Поскольку в этом равенстве r не может быть отрицательным, то $7q$ не может быть больше -23 и должно делиться на 7. Ближайшее не превосходящее -23 число, делящееся на 7, равно -28. Тогда $-23 = -28 + 5 = 7 \cdot (-4) + 5$, а значит остаток от деления -23 на 7 равен 5, целое частное равно -4.

Ответ: 5.

Остатки обладают следующими замечательным свойствами:

Теорема 29.2. Пусть целые числа a_1 и a_2 при делении на натуральное число b дают остатки r_1 и r_2 соответственно. Тогда

а) остаток от деления $a_1 + a_2$ на b равен остатку от деления $r_1 + r_2$ на b;

б) остаток от деления $a_1 - a_2$ на b равен остатку от деления $r_1 - r_2$ на b;

в) остаток от деления $a_1 a_2$ на b равен остатку от деления $r_1 r_2$ на b.

Докажем какое-нибудь одно из утверждений, например б).

Доказательство. По условию числа a_1 и a_2 можно записать в виде $a_1 = bq_1 + r_1$, $a_2 = bq_2 + r_2$, тогда $a_1 - a_2 = b(q_1 - q_2) + r_1 - r_2$. С другой стороны, если остаток от деления $a_1 - a_2$ на b равен r, то $a_1 - a_2 = bq + r$, и верно неравенство $0 \leqslant r < b$. Значит $b(q_1 - q_2) + r_1 - r_2 = bq + r$ откуда имеем: $r_1 - r_2 = bq - b(q_1 - q_2) + r = bQ + r$. Поскольку в последнем равенстве Q — некоторое целое число, $0 \leqslant r < b$, то это и означает, что остаток от деления $r_1 - r_2$ на b равен r — остатку от деления $a_1 - a_2$ на b.

Данная теорема позволяет существенно облегчить процесс нахождения остатков от деления некоторых числовых выражений.

Пример 29.2. Найти остаток от деления числа $59 \cdot 60 \cdot 61 - 62$ на 7.

Поскольку остатки от деления чисел 59, 60, 61 и 62 на 7 равны соответственно 3, 4, 5 и 6, то искомый остаток равен остатку от деления числа $3 \cdot 4 \cdot 5 - 6 = 60 - 6 = 54$ на 7, т.е. равен 5.

Ответ: 5.

Для более короткой записи этого решения полезно знать следующее определение.

Определение 29.1. Целые числа a и b называются *сравнимыми по модулю n*, где n — натуральное число, если a и b дают один и тот же остаток при делении на n.

Обозначение: $a \equiv b \pmod{n}$.

С помощью новых обозначений решение последней задачи можно записать следующим образом:

$59 \cdot 60 \cdot 61 - 62 \equiv 3 \cdot 4 \cdot 5 - 6 \equiv 60 - 6 \equiv 54 \pmod{7}$.

Ответ: 5.

Стоит сказать и о том, что значит a делится на b.

Определение 29.2. Пусть a и b — целые числа. Тогда b называется делителем a, если существует такое целое число q, что $a = bq$. В этом случае a называется *кратным b, q — частным от деления a* на b.

Обозначение: $b|a$, читается «b делит a.»

Заметьте, что определение делимости дается для целых чисел a и b, а в случае деления с остатком одно из чисел было натуральным. Если бы в определении деления с остатком число b могло принимать отрицательные значения, то неравенство $0 \leqslant r < b$ было бы невозможным. Несложно понять, что при положительных b верна следующая теорема.

Теорема 29.3. Натуральное число b является делителем числа a тогда и только тогда, когда остаток от деления a на b равен 0.

Задачи

Задача 29.1. Найдите частное и остаток от деления a на b, если

а) $a = 387$, $b = 12$;
б) $a = 17$, $b = 31$;
в) $a = -10$, $b = 3$;
г) $a = -387$, $b = 12$;
д) $a = (n+1)^2$, $b = n$, n — натуральное;
е) $a = n^2+2n-1$, $b = n$, n — натуральное.

Задача 29.2. При делении целого числа a на 67 получили частное 29 и остаток r. Найдите наибольшее возможное значение a.

Задача 29.3. Целое число a при делении на натуральное число b дает остаток r. Какой остаток при делении на b дает число $-a$?

Задача 29.4. Положительное число делится на 24, а после прибавления 1 делится на 23. Может ли так быть?

Задача 29.5. Известно, что числа 1270 и 1449 дают при делении на натуральное число a одинаковые остатки. Найдите это число.

Задача 29.6. Натуральное число A при делении на 2008 дает в остатке 179, и при делении на 2009 дает в остатке 179. Найдите остаток от деления этого числа на 14.

Задача 29.7. Рассмотрим остатки от деления m последовательных натуральных чисел на m. Может ли в этой последовательности встретиться два одинаковых числа? Три одинаковых?

Задача 29.8. Целые числа a, b, c дают при делении на 7 остатки 1, 4, 5 соответственно. Найдите остатки от деления на 7 чисел:[1] **а)** $a+b+c$; **б)** $2a-3b+4c$; **в)** bc; **г)** c^3; **д)** a^n, где n — произвольное натуральное число.[2]

Задача 29.9. Пусть целые числа a_1 и a_2 при делении на натуральное число b дают остатки r_1 и r_2 соответственно. Докажите, что

а) остаток от деления a_1+a_2 на b равен остатку от деления r_1+r_2 на b;
б) остаток от деления a_1a_2 на b равен остатку от деления r_1r_2 на b.

Задача 29.10. Найдите остатки от деления

а) $2006 \cdot 2007 + 2008 \cdot 2009$ на 6;
б) $736^3 - 355 \cdot 354 \cdot 353$ на 7;
в) $9^9 + 9^{19} + 9^{29}$ на 8.

Задача 29.11. Какие остатки может давать 13^n при делении на 12?

Задача 29.12. Какие остатки может давать $2n^2+11n+19$ при делении на $n+4$ в зависимости от натурального значения n?

Задача 29.13. Докажите, что числа a и b сравнимы по модулю n тогда и только тогда, когда разность $a-b$ делится на n.

Задача 29.14. Пусть целые числа x, y, m, и n таковы, что $x \equiv m \pmod b$ и $y \equiv n \pmod b$. Докажите, что

а) $x+y \equiv m+n \pmod b$;
б) $x-y \equiv m-n \pmod b$;
в) $xy \equiv mn \pmod b$.

Другими словами, докажите, что сравнения можно складывать, вычитать и перемножать.

Задача 29.15. Какие остатки от деления на 3 могут давать **а)** целые числа; **б)** квадраты целых чисел?

Задача 29.16. Докажите, что из любых пяти целых чисел можно найти три, сумма которых делится на 3.

Задача 29.17. **а)** Существуют ли четыре таких натуральных числа, что сумма любых трех из них есть простое число? **б)** Существуют ли пять таких чисел?

[1] Пользоваться в этой задаче теоремой 29.2 нельзя, решайте с помощью определения.
[2] Воспользуйтесь биномом Ньютона.

Задача 29.18. Пусть сумма двух чисел делится на n, а остаток от деления одного из этих чисел на n равен r. Что можно сказать об остатках от деления **а)** второго числа на n? **б)** квадратов этих чисел на n? **в)** кубов этих чисел на n?
Задача 29.19. Докажите, что среди 31 целого числа найдутся два, квадраты которых дают одинаковые остатки при делении на 60.
Задача 29.20. Назовем число n удобным, если n^2+1 делится на 1000001. Докажите, что среди чисел $1, 2, \ldots, 1000000$ четное число удобных.
Задача 29.21. Найдите остаток от деления $(1^3 + 2^3 + \ldots + n^3)$ на $(n + 2)$.

Критерии оценок

«5»	«4»	«3»	«2»
18 задач	14 задач	10 задач	6 задач